中線定理とスチュワートの定理の拡張

奈良女子大学附属中等教育学校　4年　井上友裕

1. 概要

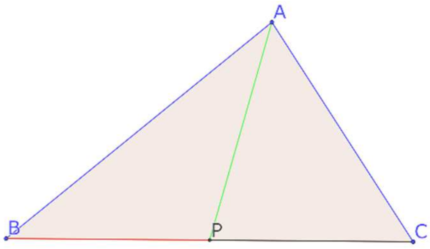
△ABC の辺 BC を 2 等分するときに成り立つ中線定理を拡張して、辺を n 等分したときに成り立つ定理を証明した。

2. 研究内容

2-1 中線定理とは

△ABC と辺 BC の中点 P について次のような式が成り立つ。

$$AC^2 + AB^2 = 2\left(BP^2 + AP^2\right)$$

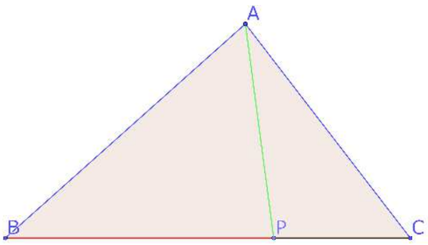


中線定理は三平方の定理で証明できる。

2-2 スチュワートの定理とは

△ABC の辺 BC を点 P で内分すると、次のような式が成り立つ。

$$AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP = BC\left(BP \cdot CP + AP^2\right)$$

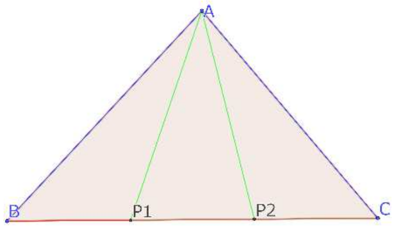


スチュワートの定理は三平方の定理または余弦定理で証明できる。

2-3 3 等分したとき

△ABC の辺 BC を点 P1, P2 で三等分したとき、次のような式が成り立つことが分かっている。

$$AC^2 + AB^2 = 4BP_1^2 + AP_1^2 + AP_2^2$$



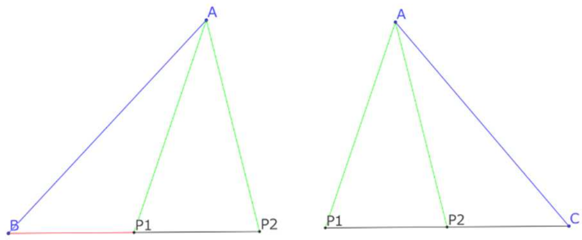
この命題には主に 2 つの証明方法がある。

(ⅰ)中線定理を使う方法

① △ABP$_2$ の辺 BP$_2$ の中点 P$_1$ において中線定理を使う。

② △AP$_1$C の辺 P$_1$C の中点 P$_2$ において中線定理を使う。

③ ①, ②で導いた式を足して計算する。



(ⅱ)スチュワートの定理

① 点 P$_1$ についてスチュワートの定理を使う。

② 点 P$_2$ についてスチュワートの定理を使う。

③ ①, ②で導いた式を足して計算する。

2-4 4, 5, 6, 7 等分した場合

(ⅱ)の方法で考えた。

以下の結果が得られたので式を整理すると、

・2 等分

$$1\left(AC^2 + AB^2\right) = 2\left(AP^2\right) + 2BP^2$$

・3 等分

$$1\left(AC^2 + AB^2\right) = 1\left(AP_1^2 + AP_2^2\right) + 4BP_1^2$$

・4 等分

$$3\left(AC^2+AB^2\right)=2\left(AP_1^2+\cdots+AP_3^2\right)+20BP_1^2$$

・5 等分

$$2\left(AC^2+AB^2\right)=1\left(AP_1^2+\cdots+AP_4^2\right)+20BP_1^2$$

・6 等分

$$5\left(AC^2+AB^2\right)=2\left(AP_1^2+\cdots+AP_5^2\right)+70BP_1^2$$

・7 等分

$$3\left(AC^2+AB^2\right)=1\left(AP_1^2+\cdots+AP_6^2\right)+56BP_1^2$$

　ここで、AC^2+AB^2 と $AP_1^2+\cdots+AP_n^2$ の係数の比の値は、それぞれ $\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},\frac{6}{2}$ になっている。つまり、n 等分するとき比の値は $\frac{n-1}{2}$ になると予想できる。

2-5 n 等分したとき

定理 1

△ABC の辺 BC を点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ で n 等分したとき、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}AP_i^2$$

が成り立つ。

(証明)

点 AP_i においてスチュワートの定理より

$$AC^2\cdot BP_i+AB^2\cdot CP_i=BC\left(BP_i\cdot CP_i+AP_i^2\right)$$

ここで、$BP_i=iBP_1, CP_i=(n-i)BP_1, BC=nBP_1$ より、

$$iAC^2+(n-i)AB^2=n\left\{i(n-i)BP_1^2+AP_i^2\right\}$$

この式を $1\le i\le n-1$ で足し合わせる.

$$\sum_{i=1}^{n-1}iAC^2+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)AB^2=\sum_{i=1}^{n-1}n\left\{i(n-i)BP_1^2+AP_1^2\right\}$$

これを整理すると

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}AP_i^2$$

(Q.E.D.)

　インターネットに次のような定理が掲載されていた。

定理 2

△ABC において，辺 BC を n+1 等分する点を D1,D2,...,Dn とするとき，

$$AB^2+AC^2=AD_1^2+AD_n^2+2nBD_1^2$$

が成り立つ.

　この定理は同じ三角形を(ｉ)の方法で証明している。この定理と私の証明した定理が互換性をもつということを示す。

定理 2 の式を $\frac{n}{2}$ 倍すると、

$$\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)=\frac{n}{2}AD_1^2+\frac{n}{2}AD_n^2+n^2BD_1^2$$

$$=AD_1^2+AD_n^2+n^2BD_1^2+\frac{n-2}{2}\left(AD_1^2+AD_n^2\right)$$

$$=AD_1^2+AD_n^2+n^2BD_1^2$$
$$+\frac{n-2}{2}\left(AD_2^2+AD_{n-1}^2+2(n-2)BD_1^2\right)$$

$$=AD_1^2+AD_2^2+AD_{n-1}^2+AD_n^2+$$
$$\left\{n^2+(n-2)^2\right\}BD_1^2+\frac{n-4}{2}\left(AD_2^2+AD_{n-1}^2\right)$$

今までの式変形を繰り返す

　ここで、この変形を行うたびに、()内の式に一つ内側の線分の平方が現れることがわかる。したがって、最終的に n が奇数のときには中線定理のよう名図が、n が偶数の際は三等分したときの定理のような図が得られるということになる。

① nが奇数の場合

式変形を$\dfrac{n-1}{2}$回繰り返すと

$$\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)=AD_1^2+\cdots+AD_{\frac{n-1}{2}}^2+AD_{\frac{n+3}{2}}^2+$$

$$\cdots+AD_n^2+\left\{n^2+\left(n-2\right)^2+\cdots+3^2\right\}BP_1^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(AD_{\frac{n-1}{2}}^2+AD_{\frac{n+3}{2}}^2\right)$$

ここで、中線定理を用いて、

$$(\text{与式})=\sum_{i=1}^{n}AD_i^2+\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(2k+1\right)^2BP_1^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}AD_i^2+\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)BD_1^2$$

② nが偶数の場合

式変形を$\dfrac{n-1}{2}$回繰り返すと

$$\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)=AD_1^2+\cdots+AD_{\frac{n-2}{2}}^2+AD_{\frac{n+4}{2}}^2$$

$$+\cdots+AD_n^2+\left\{n^2+\left(n-2\right)^2+\cdots+4^2\right\}BD_1^2$$

$$+\left(AD_{\frac{n-2}{2}}^2+AD_{\frac{n+4}{2}}^2\right)$$

ここで、三等分したときの定理を用いて、

$$(\text{与式})=\sum_{i=1}^{n}AD_i^2+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}4k^2BD_1^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}AD_i^2+\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)BD_1^2$$

したがって、いずれのnに対しても

$$\frac{n}{2}\left(AB^2+AC^2\right)=\sum_{i=1}^{n}AD_i^2+\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)BD_1^2$$

よって、D_kをP_kと、nをn-1と置換すると

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2+AB^2\right)=\frac{1}{6}n\left(n-1\right)\left(n+1\right)BP_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}AP_i^2$$

つまり、中線定理を使う方法でもスチュワートの定理を使う方法でも最終的に得られる式は互換性があるといえる。

<u>定理2のメリット</u>

1つ内側の線分が式に含まれているので帰納的に考えるのに適している

<u>定理1のメリット</u>

すべての線分が式に含まれているので全体を同時に考えることができる

3. 結果・考察・今後の課題

三角形の1つの辺をn等分したときに成り立つ式を導出して中線定理を拡張することができた。

これからは、中線定理を多角形や多次元の立体に拡張する研究をしたいと思う。

具体的には中線定理を証明するのに必要である三平方の定理を拡張したい。

また、中線定理には幾つか証明方法があるので今回証明した定理の別証明を考えたい。

4. 参考文献

[1]高校数学の美しい物語.「スチュワートの定理の証明とその仲間」,
https://manabitimes.jp/math/688

[2]Accademia Nuts.「中線定理の拡張?」,
https://ameblo.jp/accade/entry-12250886087.html