中線定理・スチュワートの定理の拡張

奈良女子大学附属中等教育学校　4年　井上　友裕

【キーワード】中線定理　スチュワートの定理

１．動機

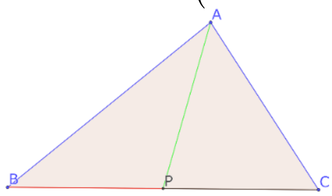
授業で三角形の辺を二等分する「中線定理」について学習した。そして、中線定理の拡張である「スチュワートの定理」を使って、三角形の底辺を n 等分する中線定理の拡張を試みた。

２．研究内容

<u>中線定理とは</u>

△ABC と辺 BC の中点 P について次のような式が成り立つ。

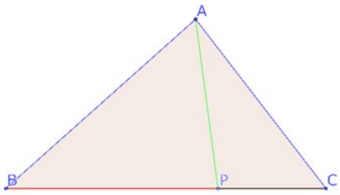
$$AC^2 + AB^2 = 2\left(BP^2 + AP^2\right)$$



<u>スチュワートの定理とは</u>

△ABC の辺 BC を点 P で内分すると、次のような式が成り立つ。

$$AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP = BC\left(BP \cdot CP + AP^2\right)$$



<u>n 等分したとき</u>

スチュワートの定理を用いて次の定理を証明した。

<u>定理 1</u>

△ABC の辺 BC を点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ で n 等分したとき、

$$\frac{n-1}{2}\left(AC^2 + AB^2\right) = \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)BP_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} AP_i^2$$

が成り立つ。

インターネットに次のような定理が掲載されていた。

<u>定理 2</u>

△ABC において，辺 BC を $n+1$ 等分する点を $D_1, D_2, \cdots, D_n$ とするとき，

$$AB^2 + AC^2 = AD_1^2 + AD_n^2 + 2nBD_1^2$$

が成り立つ.

定理 1 と定理 2 の整合性を確認した。

３．結果・考察・今後の課題

三角形の 1 つの辺を n 等分したときに成り立つ式を導出して中線定理を拡張することができた。これからは、中線定理を多角形や多次元の立体に拡張する研究をしたい。また、今回証明した定理の別証明を考えたい。

引用文献

[1] 高校数学の美しい物語.「スチュワートの定理の証明とその仲間」, https://manabitimes.jp/math/688

[2] Accademia Nuts.「中線定理の拡張？」 https://ameblo.jp/accade/entry-12250886087.html