# 第４章　産業連関分析のための各種係数の内容と計算

## 第 1 節　投入係数と逆行列係数

この章では、産業連関表に用いられる投入係数、逆行列係数、また、これらの係数から導き出される各種の係数を解説し、基本的な原理を紹介する。

### １　投入係数

(1) 投入係数の意味

投入係数とは、産業連関表の各部門のタテの投入額を、その部門の生産額で除したもので、ある産業が生産物１単位を生産するのに必要な各部門からの原材料投入量を意味し、生産物１単位に対する投入原材料の割合を示している。

（第４－１表）取引基本表

| | 産業１ | 産業２ | 最終需要 | 県内生産額 |
|---|---|---|---|---|
| 産業１ | $\chi_{11}$ | $\chi_{12}$ | $Y_1$ | $X_1$ |
| 産業２ | $\chi_{21}$ | $\chi_{22}$ | $Y_2$ | $X_2$ |
| 粗付加価値 | $V_1$ | $V_2$ | | |
| 県内生産額 | $X_1$ | $X_2$ | | |

今、県経済を単純化し、産業１及び産業２だけからなるものと仮定した場合、取引基本表は、第４－１表のように表現できる。

産業１が、産業１（自部門）から投入した額$\chi_{11}$を産業１の県内生産額$X_1$で除した値を$a_{11}$とすれば、$a_{11}$は産業１の生産物１単位を生産するために必要な産業１の投入単位を表す。

$$a_{11}=\frac{\chi_{11}}{X_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同様に$a_{21}=\dfrac{\chi_{21}}{X_1}$は、産業１がその生産物を１単位生産するために必要な産業２の投入割合を表している。

また、中間投入と同様に産業１の発生粗付加価値$V_1$を生産額で除して$\upsilon_1=V_1／X_1$を定義できる。この場合、粗付加価値$V_1$が、産業１の労働や資本など生産要素の投入を意味するから、$\upsilon_1$はそれら生産要素の投入原単位を示している（粗付加価値率）と考えることができる。以上の計算を産業２（第４－１表の第２列）についても同様に行うと、第４－２表のような投入係数表を求めることができる。

（第４－２表）投入係数表

| | 産業１ | 産業２ |
|---|---|---|
| 産　業　１ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| 産　業　２ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |
| 粗付加価値 | $\upsilon_1$ | $\upsilon_2$ |
| 県内生産額 | 1 | 1 |

$$a_{ij}=\frac{\chi_{ij}}{X_j} \qquad （ｉは行を、ｊは列を表す）$$

$$\upsilon_j = \frac{\chi_{ij}}{X_j} \qquad （j は列を表す）$$

ここで産業連関表における、投入係数の意味について考えることにする。

産業連関表の行（ヨコ）の産出バランスは、第４－１表から次のとおりとなる。

$$\left.\begin{array}{ll} 産業1 & \chi_{11}+\chi_{12}+Y_1=X_1 \\ 産業2 & \chi_{21}+\chi_{22}+Y_2=X_2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

つまり、産業連関表をヨコに読むことは、中間投入＋最終需要＝生産額の関係を捉えることであり、需要と供給のバランスを考えることになる。（これを需給均衡方程式という）

これを①式を用いて作成した第４－２表の投入係数で表すと次のとおりになる。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1+a_{12}X_2+Y_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+Y_2=X_2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ③$$

③式は未知数が４個（$X_1$、$X_2$、$Y_1$、$Y_2$）の連立方程式であり、最終需要$Y_1$、$Y_2$を与えれば、未知数は、$X_1$、$X_2$の２個だけになり、２元１次の方程式を解くことによって、産業１と産業２の必要な生産額（$X_1$、$X_2$）を求めることができる。

このように最終需要と生産との間には、一定の関係が存在しており、この関係を規定しているのが投入係数である。

(2) 生産の波及過程

これまで、投入係数を用いることにより、与えられた最終需要を満たすために必要な生産額を連立方程式を解くことにより求められることを説明した。

しかし、ある産業部門に対する需要の増加は、その生産している産業部門の生産増加分だけを生産すれば済むのではなく、生産過程で原材料に対する需要が派生し、その新たな派生需要が各産業の生産を誘発し、その結果再び派生需要が生み出され………。という無限の連鎖の総累積額として最終的に必要となる生産額が求まる。連立方程式を解くとは、このように直接・間接に誘発される生産額を求めることである。

具体的な数値を用いて説明する。

$$\begin{array}{ll} a_{11}=0.3 & a_{12}=0.4 \\ a_{21}=0.1 & a_{22}=0.2 \end{array} \quad 行列で表すと \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} = A$$

$$Y_1=400 \quad Y_2=500 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix} = Y （Fで表す場合もある）$$

$$X_1 \qquad X_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X$$

上記の記号は、産業連関表におけるもっとも基本であり、以後の式の展開にはこれらの記号に加えて

単位行列（対角線上の成分がすべて１のもの $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ＝Ｉで表す）とが、主に用いられる。

なお、これらのほかに、粗付加価値＝Ｖ、移輸出＝Ｅ、移輸入＝Ｍで表される。

以上の仮設の係数について、まず連立方程式を解いて均衡産出高を導出する。

数値を代入すれば、

$$\left.\begin{array}{l} 0.3X_1+0.4X_2+400=X_1 \\ 0.1X_1+0.2X_2+500=X_2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1-(0.3X_1+0.4X_2)=400 \\ X_2-(0.1X_1+0.2X_2)=500 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0.7X_1-0.4X_2=400 \\ -0.1X_1+0.8X_2=500 \end{array}\right\}$$

となり、これを$X_1$、$X_2$について解くと、$X_1=1000$、　$X_2=750$が求められる。

次に、最終需要の増加が中間需要を次々に派生していく生産の誘発過程を行列を用いて考えてみる。

最終需要が$Y_1=400$、$Y_2=500$であるから、各産業はまず$Y_1$、$Y_2$だけの生産を行う。これを最終需要による直接効果という。

$$X^0{}_1 = Y_1 = 400$$
$$X^0{}_2 = Y_2 = 500$$

（説明のため上記の仮定をする。なお、上付きの添え数字０は、直接効果によることを示す。）

さて、$X^0{}_1$、$X^0{}_2$の生産のために、原材料に対する需要が発生し、この新たな派生需要を満たすために各産業の生産が誘発される。（第１次間接効果）

$$\begin{pmatrix} X^1{}_1 \\ X^1{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0{}_1 \\ X^0{}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3\times400+0.4\times500 \\ 0.1\times400+0.2\times500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 320 \\ 140 \end{pmatrix}$$

（上付きの添え数字１は、第１次間接効果によることを示す。以下同じ。）

さらに$X^1{}_1$、$X^1{}_2$の生産のために、また新たな原材料に対する需要が発生し、これを満たすための生産が誘発される。（第２次間接効果）

$$\begin{pmatrix} X^2{}_1 \\ X^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1{}_1 \\ X^1{}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3\times320+0.4\times140 \\ 0.1\times320+0.2\times140 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 152 \\ 60 \end{pmatrix}$$

以下、同様に第３次、第４次……の間接効果を計算していくと、最終的な生産額は直接効果と間接効果の合計であり、これは$X_1=1000$、$X_2=750$となる。

$$X_1 = X^0{}_1 + X^1{}_1 + X^2{}_1 + \cdots\cdots + X^\infty{}_1$$
$$= 400 + 320 + 152 + \cdots\cdots$$
$$= 1000$$
$$X_2 = X^0{}_2 + X^1{}_2 + X^2{}_2 + \cdots\cdots + X^\infty{}_2$$
$$= 500 + 140 + 60 + \cdots\cdots$$
$$= 750$$

となり、これは、以下のとおり書き表すことが出来る。

$$X = Y + AY + A^2Y + A^3Y + \cdots\cdots + A^\infty Y$$
$$= (I + A + A^2 + A^3 + \cdots\cdots\cdots + A^\infty)\ Y$$

## ２　逆行列係数

(1) 逆行列係数の導出とその意味

逆行列係数とは、数学上の用語であり、Ａの逆数が１／Ａすなわち$A^{-1}$と表されるように、これに対応した計算を行列で行うことである。

これまでに投入係数を利用した生産波及効果の計算方法を説明してきたが、前述のように産業がわずか２部門ならば計算も容易である。しかし実際の産業連関分析で使用する部門数は、13～108部門であり、これを多元連立方程式や繰り返し計算で計算することは、きわめて困難である。

逆行列係数とは、ある部門に対する最終需要が１単位生じた場合、各部門に対してどのような生産波及が生じ、部門別の生産額が最終的にはどれだけになるかを、計算したものである。

このため、逆行列を利用して高次の連立方程式を解くことになる。

計算式（Ⅰ）

そこで、第③式に戻って、これを$X_1$、$X_2$について解くと、次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + Y_1 = X_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + Y_2 = X_2 \end{array}\right\}$$

両辺を整理し、

$$\left.\begin{array}{l} (1-a_{11})\ X_1 - a_{12}X_2 = Y_1 \\ -a_{21}X_1 + (1-a_{22})\ X_2 = Y_2 \end{array}\right\}$$

これを行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} 1-a_{12} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

変形して

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

この一部の

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

が逆行列である。

計算式（Ⅱ）

または、第③式を行列を用いて表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

となり、前述で説明したＡ、Ｙ、Ｘ、Ｉを用いて表すと

$$AX+Y=X$$

となり、これをＸについて解くと

$$X-AX=Y$$

$$(I-A)X=Y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

$$X=(I-A)^{-1}Y$$

となる。ここでは、Ｉは単位行列であるから

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

と同じ結果が得られる。

この逆行列係数の経済的意味は、$Y_1$、$Y_2$を与えれば、$X_1$、$X_2$が決まることからも明らかなように、最終需要１ 単位の増加により必要となる生産額を表している。

一度この逆行列を計算しておけば、最終需要がいろいろな値を取っても、必要となる生産額をたやすく求めることができる。よって、逆行列係数は、生産波及効果の分析の要となる。

(2) 県際取引の考慮

これまでの説明では、説明の簡略化のために、移輸出入については触れなかった。しかし、実際の産業連関分析では、需要の一部は県外からの移輸入で賄われ、また生産物の一部は県外へ移輸出される。生産の誘発過程においても同様に、誘発された需要が、すべて賄われてはいない。このように県際構造も組み込まれなくては、正しい経済分析を行うことはできない。

（第４－３表）県際取引を考慮した産業連関表

| | 産業１ | 産業２ | 県内最終需要 | 移輸出 | 移輸入 | 県内生産額 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 産業１ | $\chi_{11}$ | $\chi_{12}$ | $Y_1$ | $E_1$ | $-M_1$ | $X_1$ |
| 産業２ | $\chi_{21}$ | $\chi_{22}$ | $Y_2$ | $E_2$ | $-M_2$ | $X_2$ |
| 粗付加価値 | $V_1$ | $V_2$ | | | | |
| 県内生産額 | $X_1$ | $X_2$ | | | | |

第４－３表は、移輸出入も考慮した産業連関表である。

この表も今までと同様に、まず需給均衡方程式で表すと、

$$X=AX+Y+E-M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。

ここでMは、移輸出を除く総需要（＝ＡＸ＋Ｙ）に比例して決まると考えられる。このように移輸出を除いたのは、

産業連関表では、移輸出は県内生産物の県外への出荷額が計上され、単なる通過取引は計上しない方式を取っており、移輸出品の中に一定割合で移輸入が含まれないという定義からである。

移輸入率は、このMと、移輸出を除く総需要（＝ＡＸ＋Ｙ）との比率のことで

$$\bar{M} = \frac{M}{AX+Y}$$

で表される。これを書きかえて、

$$M = \bar{M}(AX+Y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥$$

第⑤式に代入して

$$X = AX+Y+E-\bar{M}(AX+Y)$$

変形して

$$(I-A+\bar{M}A)X = Y+E-\bar{M}Y$$

$$[I-(I-\bar{M})A]X = (I-\bar{M})Y+E$$

$$X = [I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑦$$

となる。

(3) 影響力係数と感応度係数

影響力係数は、逆行列係数の列和（逆行列係数をタテに合計した数値）をその平均で除した値で、ある部門の最終需要が１単位増加したとき、産業全体に直接・間接に必要となる生産量を示し、これを利用して、ある産業が産業全体にどの程度影響を与えているかを把握する係数である。

なお、係数は以下の式で表される。

$$\text{影響力係数} = \frac{\text{逆行列係数の各列和}}{\text{逆行列係数の列和全体の平均値}}$$

$$= \frac{{}_i\overset{n}{\Sigma}(n)\,bij}{(1/n)\ {}_j\Sigma_i\Sigma\ bij}$$

（ｎ：部門数、$b_{ij}$：逆行列係数）

一方、感応度係数は、逆行列係数の行和（逆行列係数をヨコに合計した数値）をその平均で除した値で、ある部門でそれぞれ最終需要が１単位増加したとき、ある部門が供給すべき生産量を示し、これを利用して、ある産業が産業全体からどの程度影響を受けているかを把握する係数である。

なお、係数は以下の式で表される。

$$\text{感応度係数} = \frac{\text{逆行列係数の各行和}}{\text{逆行列係数の行和全体の平均値}}$$

$$= \frac{{}_i\overset{n}{\Sigma}(n)\,bij}{(1/n)\ {}_j\Sigma_i\Sigma\ bij}$$

（ｎ：部門数、$b_{ij}$：逆行列係数）

感応度係数は、各部門の最終需要が、それぞれ等しく増加するという、現実にはありえない仮定の上に立っているので、影響力係数と比べると、経済的意味は薄い。

一般に、影響力係数は、中間投入率が高い部門で大きく、感応度係数は、中間需要が高く、移輸入率が低い部門で大きくなる。

また、影響力係数と感応度係数を組み合わせることによって、各部門の特性をみることができる。影響力係数を縦軸

にとり、感応度係数を横軸にとって各部門をプロットしたものである。これによって、各部門を４つのグループに分けることができる。（第４－４表）

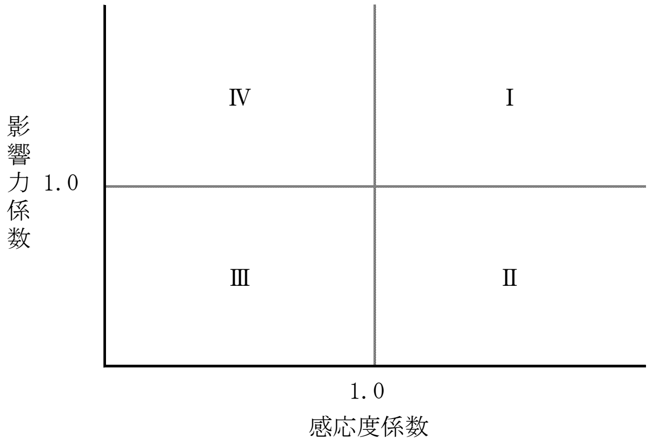
［Ⅰ］このグループに属する部門は、影響力係数及び感応度係数ともに高いという性質をもつ部門である。

［Ⅱ］このグループに属する部門は、影響力係数が高く、感応度係数が低いという性質をもつ部門である。

［Ⅲ］このグループに属する部門は、影響力係数、感応度係数ともに低いという性質をもつ部門である。

［Ⅳ］このプループに属する部門は、影響力係数が低く、感応度係数が高いという性質をもつ部門である。

（第４－４表）



# 第 2 節　最終需要との関わり

## 1　最終需要と生産

(1) 生産誘発額

内生部門の各産業は、各生産部門（内生部門）及び最終需要部門に財・サービスを供給しているが、全体としてみれば、内生部門の生産活動は最終需要を過不足なく満たすために行われているのであり、その生産水準は、各最終需要の大きさによって決定される。

「最終需要項目別生産誘発額」とは、各最終需要項目によって誘発された各産業部門の県内生産額が、どの最終需要の項目によってどれだけ誘発されたものであるのか、その内訳をみたものである。

産業連関表では、すでに述べた（第⑦式）とおり、生産額と最終需要との間に次のような関係がある。

$$X = [I - (I - \bar{M})A]^{-1}[(I - \bar{M})Y + E]$$

そこで、生産誘発額は次の算式によって求められる。

移輸出を除く県内最終需要による誘発額は、

$$X(Y_t) = [I - (I - \bar{M})A]^{-1}(I - \bar{M})Y_t$$

$t = 1, 2 \cdots\cdots\cdots\cdots N$（Nは県内最終需要項目の数）

移輸出による生産誘発額は、

$$X(E) = [I - (I - \bar{M})A]^{-1}E$$

$Y_t$：項目別県内最終需要　　E：移輸出

以上の計算から出た係数は、県内生産額の変動が、最終需要のどの項目によってもたらされたものであるかを分析するための、一つの指標となる。

(2) 生産誘発係数

最終需要項目別生産誘発額をそれぞれ対応する項目の最終需要の合計額で除した比率。

項目別最終需要に１単位の需要があった場合、各産業の生産額がどれだけ誘発するか示し、生産誘発係数の高い最終需要ほど生産波及効果が大きいということである。これは、次式で求められる。

$$\text{生産誘発係数} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{対応する最終需要の合計額}}$$

(3) 生産誘発依存度

最終需要項目別生産誘発額を項目別の構成比で示したものである。

各産業部門の県内生産額が、どの最終需要項目によってどれだけ誘発されたか、そのウエイトを示したものであり、次式で求められる。

$$\text{生産誘発依存度} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{生産誘発額合計（行和）}}$$

各部門の生産誘発依存度を消費、投資及び移輸出の３つに分け、このいずれかへの生産誘発依存度が50%を越えているものについてそれぞれ消費依存型産業、投資依存型産業、移輸出依存型産業という３つのグループに区分できる。

## ２　最終需要と粗付加価値

（1）粗付加価値誘発額

各産業部門の県内生産額は、中間投入と粗付加価値で構成されているため、最終需要を満たすのに必要な各産業の県内生産額を求めると、各産業で発生する粗付加価値を得ることができ、次式によって求められる。

$$V=\bar{V}\{[I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E]\}$$

となる。

ただし、Ｖは粗付加価値率の対角行列。

これは、生産誘発額$[I-(I-\bar{M})A][(I-\bar{M})Y+E]$に、対応する各産業の粗付加価値率Ｖを乗ずることである。

（2）粗付加価値誘発係数

最終需要項目別の粗付加価値誘発額を、対応する最終需要項目の合計で除したものである。

項目別の１単位の最終需要が各産業の粗付加価値をどれだけ誘発したか、すなわち、各最終需要項目の粗付加価値誘発度の大小を知ることができ、次式によって求められる。

$$\text{粗付加価値誘発係数}=\frac{\text{項目別粗付加価値誘発額}}{\text{対応する最終需要の列和}}$$

（3）粗付加価値誘発依存度

生産誘発依存度と同様の考え方であり、次式によって求められる。

$$\text{粗付加価値誘発依存度}=\frac{\text{項目別粗付加価値誘発額}}{\text{粗付加価値誘発額合計（行和）}}$$

## ３　最終需要と移輸入

（1）移輸入誘発額

各産業部門は、需要を賄うために生産を行うが、需要（中間需要及び最終需要）はすべて県産品で賄われているわけでなく、一部は、県外からの移輸入品によって賄われることになる。

既に述べたとおり、生産が最終需要によって誘発されるように、移輸入も最終需要によって誘発されることになる。例えば、県内で生産が行われていない部門に最終需要が生じた場合には、すべてが県外から誘発されることになる。

そこで、各産業部門の移輸入額が、どの需要項目によって、どれだけ誘発されたかを示したものが、最終需要項目別の移輸入誘発額である。

なお、移輸入誘発額は、次式によって求められる。

まず、Ｍは移輸出を除く総需要（＝ＡＸ＋Ｙ）に比例して決まると考えられるのは前述のとおりであり、第⑥式を用いて、

$$M=\bar{M}(AX+Y)$$

と表すことができる。

次に、県内生産額は、第⑦式を用いて

$$X=[I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E]$$

と表すことも既に述べたとおりである。

ここで第⑥式に、第⑦式を代入すると

$$\begin{aligned}M&=\bar{M}\{A[I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E]+Y\}\\&=\bar{M}A[I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E]+\bar{M}Y\end{aligned}$$

となる。

この式の表す移輸入誘発額は間接、直接の二つに分けられ、上の$\bar{M}A[I-(I-\bar{M})A]^{-1}[(I-\bar{M})Y+E]$が、間接的誘発額であり、生産誘発額に$\bar{M}A$を乗ずることによって求められる。

一方、直接的移輸入額は$\bar{M}Y$で、最初に生じた県内最終需要額Ｙに移輸入率の対角行列$\bar{M}$を乗ずることによって求め

られる。

(2) 移輸入誘発係数

生産誘発係数と同様の考え方で、最終需要項目の移輸入誘発額をそれぞれの対応する項目の最終需要の合計で除した比率。

項目別の１単位の最終需要が各産業の移輸入をどれだけ誘発したか、すなわち、各最終需要項目の移輸入誘発額の大小を知ることができ、次式によって求める。

$$移輸入誘発係数＝\frac{最終需要項目別の移輸入誘発額}{対応する最終需要の列和}$$

(3) 移輸入誘発依存度

移輸入誘発額において、項目別の構成比を求めたものであり、各産業の移輸入額がいかなる最終需要項目により誘発されたかが、ウエイトでわかり、次式によって求められる。

$$移輸入誘発依存度＝\frac{項目別移輸入誘発額}{移輸入誘発額合計（行和）}$$

# 第 3 節　行 列 の 意 味 と 内 容

## １　行列の定義と用語

行列の原形は、次の①のように数を「縦と横」に並べ、その両側に［カッコ］をつけたものをいう（マトリックス（matorix）という）。そして、「横」の並び（row）を「行」といい、「縦」の並び（column）は「列」という。また、その行列を形成している一つ一つの数を行列の「要素」（element、または成分ともいう）と呼ぶ。

ちなみに、①は「３行４列の行列」または「３×４行列」といい、行列内の要素75は、第２行第３列の位置にあり、これを「第２行、第３列の要素」という。

行列は、ｉとｊの添え字に置き替えて、一般に（ｉｊ）要素と呼ぶ。

②のｍ×ｎ行列の場合、ｉは行で（１、２………ｍ）、ｊは列で（１、２………ｎ）になり、$a_{ij}$要素として表すことができる。

①

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{第１列} & \text{第２列} & \text{第３列} & \text{第４列}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{第１行}\\ \text{第２行}\\ \text{第３行}\end{array} & \begin{pmatrix} 82 & 18 & 35 & 40 \\ 12 & 33 & 75 & 21 \\ 64 & 90 & 38 & 14 \end{pmatrix}\end{array}$$

②

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{ij}$$

## ２　行列の演算

①　加減算

行列の加減算は、行及び列の数がそれぞれ相等しい行列の間で行われる。

行列Ａと行列Ｂの加減算

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$ とおくと

ＡとＢを加えるとすれば、

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 8+5 \\ 5+2 & 7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$ となる。

また、ＡからＢを引くとすれば、

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-4 & 8-5 \\ 5-2 & 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$ となる。

② 乗算

行列の乗算は、掛けられる方（左側）の行列の「列の数」と掛ける方（右側）の行列の「行の数」が等しくならなければならない。

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$ とおくと

$$A\times B=\begin{pmatrix}3\times 2+5\times 3 & 3\times 6+5\times 1\\ 4\times 2+2\times 3 & 4\times 6+2\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 23\\ 14 & 26\end{pmatrix}$$ となる。

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$$ とおくと

$$A\times B=\begin{pmatrix}2\times 4+6\times 6 & 2\times 2+6\times 3 & 2\times 5+6\times 1\\ 4\times 4+3\times 6 & 4\times 2+3\times 3 & 4\times 5+3\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 22 & 16\\ 34 & 17 & 23\end{pmatrix}$$ となる

なお、行列の乗算においては、ＡＢ＝ＢＡは成立しなく、ＡＢ≠ＢＡとなる。

ただし、単位行列「Ｉ」とのＡＩ＝Ａ、Ａ＝ＩＡは常に成立する。また、行列の乗算では次の法則が成り立つ。

結合の法則　（Ａ　Ｂ）Ｃ＝Ａ（Ｂ　Ｃ）

分配の法則　Ａ（Ｂ±Ｃ）＝ＡＢ±ＡＣ

## 3　行列の種類

正方行列　　行及び列の数が等しく正方形に並んだ行列のこと。

対角行列　　正方行列のうち対角線（左上から右下）の要素以外は全部「０」の行列。

単位行列　　上記の対角行列で、対角線上の要素が全部「１」の行列（通常「Ｉ」と表す）。

対称行列　　要素が対角線（左上から右下）に対して「対称」に配置されている行列。

転置行列　　ある行列Ａの「行と列を入れ替えたもの」を、もとの行列の転置行列という。

零 行 列　　すべての要素が「０」のことで、通常単に０（オー）と表す。

ベクトル　　ただ１行あるいは１列からなる行列をベクトルといい、前者を「行ベクトル」、後者を「列ベクトル」という。

また、すべての要素が「１」のベクトルは、それぞれ「単位行ベクトル」、「単位列ベクトル」という。